14/10/19

Βάσεις Gröbner

chtatakis - mathnet.gr

Επανάληψη (Δεν εξετάζονται!):

ουδέτερο: $0_R + x = x + 0_R = x$

Δακτύλιοι

Ορισμός: Ένα μη κενό σύνολο R, εφοδιασμένο με 2 διμελείς πράξεις: "+" $R \times R \to R$, "·" $R \times R \to R$

i) $(R, +)$ αβελιανή ομάδα

ii) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$

iii) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbb{Z}, +, \cdot)\\(\mathbb{R}, +, \cdot)\\(\mathbb{C}, +, \cdot)\\(\mathbb{Q}, +, \cdot)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Παραδείγματα μεταθετικών δακτυλίων}$$

Μεταθετικός δακτύλιος αν-ν $\forall \alpha, \beta \in R$ $\alpha\beta = \beta\alpha$

* Δεν έχει κάθε δακτύλιος μοναδιαίο

$2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ $\nexists 1_R$ $x 1_R = x$

Π.χ. $K = \{\bar{0}_{12}, \bar{4}_{12}, \bar{8}_{12}\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$

$[0]_{12}$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{0}_{12} \cdot \bar{4}_{12} = \bar{0}_{12}\\ \bar{4}_{12} \cdot \bar{4}_{12} = \bar{4}_{12}\\ \bar{8}_{12} \cdot \bar{4}_{12} = \bar{8}_{12}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\bar{x}_{12} \cdot \bar{4}_{12} = \bar{x}_{12}, \ \forall \bar{x}_{12}\\ 1_K = \bar{4}_{12}\end{array}$$

Ασχολούμαστε μόνο με μεταθετικούς δακτυλίους!

Ορισμός Ένα $x \in R$ καλείται αντιστρέψιμο του R αν $\overset{\neq 0_R}{}$
$\exists y \in R : x \cdot y = y \cdot x = 1_R$

Ορισμός Σώμα καλείται ένας μεταθετικός δακτύλιος, όπου κάθε μη μηδενικό του στοιχείο = αντιστρέψιμο.
(πχ $\left(\begin{smallmatrix}\mathbb{Q}\\ \mathbb{C}\\ \mathbb{R}\end{smallmatrix}, +, \cdot\right)$, πχ όχι $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$)

ΙΔΕΩΔΗ

Ορισμός: Ένα σύνολο $I \subseteq R$ καλείται ιδεώδες αυτού αν
i) $I \neq \emptyset$ ($0_R \in I$)
ii) $\forall a, \beta \in I \Rightarrow a + \beta \in I$ ($\Leftrightarrow a - \beta \in I$)
iii) $a \cdot r \in I$ και $r a \in I$, $\forall r \in R$, $\forall a \in I$

I υποομάδα του R ως προς την πρόσθεση '+'
$H \subseteq G$
$H \neq \emptyset$
$a, \beta \in H \Rightarrow a * \beta^{-1} \in H$

πχ Το $\mu\mathbb{Z}$ ιδεώδες του $\mathbb{Z}$
$\{\ldots, -2\mu, -\mu, 0, \mu, 2\mu, \ldots\}$

i) Προφανώς $0_\mathbb{Z} = 0 = 0\mu \in \mu\mathbb{Z}$
ii) Έστω $\underset{\mu z_1}{x}, \underset{\mu z_2}{y} \in \mathbb{Z}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$
$x - y = \mu(z_1 - z_2) \in \mu\mathbb{Z}$
iii) $\underset{\mu y,\ y \in \mathbb{Z}}{x} \in \mu\mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow x z = (\mu y) z = \mu (y z) \in \mu\mathbb{Z}$. Ομοίως $z x \in \mu\mathbb{Z}$.

Γνωστά ιδεώδη Έστω I, J ιδεώδη R
1) Άθροισμα $I + J = \{a + \beta,\ a \in I,\ \beta \in J\}$

2) Γινόμενο $I \cdot J = \left\{ \sum a_i \beta_j,\ a_i \in I,\ \beta_j \in J \right\}$

3) Πηλίκο $I : J = \{a \in R : a\beta \in I,\ \forall \beta \in J\}$

4) Ριζικό $\sqrt{I} = \{a \in R \,,\, \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$

<u>Πχ 1</u> $I = \langle x, y+1 \rangle$, $J = \langle y, y-1 \rangle$

$I \cdot J = \langle xy, x(y-1), (y+1)y, (y+1)(y-1) \rangle$

<u>Πχ 2</u> $I = \langle xz, yz \rangle$, $J = \langle z \rangle$
$\subseteq \mathbb{K}[x, y, z] = R$

$I : J = \{a \in R : az \in I\} = \{a \in R : a\cancel{z} = k_1 x\cancel{z} + k_2 y\cancel{z},\ k_1, k_2 \in R\}$
$= \{a \in R : a = k_1 x + k_2 y\} = \langle x, y \rangle$

<u>Ορισμός</u>: Ένα ιδεώδες καλείται κύριο αν $\exists a \in R$ $I = \langle a \rangle$
($\pi\chi$ $\mu\mathbb{Z} = \langle \mu \rangle \subseteq \mathbb{Z}$)

<u>Ορισμός</u>: Ένας δακτύλιος στον οποίο κάθε ιδεώδες του είναι κύριο, καλείται περιοχή κύριων ιδεωδών (Π. Κ. Ι.)

<u>Πχ</u> Γνωρίζω ότι αν $\mathbb{K}$ σώμα $\Rightarrow$ τα μοναδικά του ιδεώδη είναι
$\{0_{\mathbb{K}}\}$, $\mathbb{K}$
$\langle 0_{\mathbb{K}} \rangle$ $\langle 1_{\mathbb{K}} \rangle$
Κάθε σώμα είναι Π. Κ. Ι.